Αρχή επανάληψης :

11/05/2015

Φυλλάδιο #9 (Μιγαδικοί Πίνακες)

**Α' τρόπος**

**Άσκηση 4** $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ν.δ.ο είναι διαγωνίσιμος.

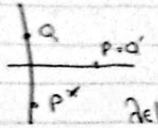
α) $\chi_A(x) = x^2+1$ που δεν αναλύεται στο $\mathbb{R}[x]$ σε γινόμενο πρωτοβαθμίων αφού δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$ επομένως ο A δεν είναι διαγωνίσιμος

**Β τρόπος**

Ο A ορθογώνιος με $\det A = 1$. Άρα είναι στροφή

Θέτουμε $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ $Ae_1 = A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Αες: $A\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$. Επομένως, ο A παριστά στροφή κατά τη φορά του ρολογιού κατά $\frac{\pi}{2}$.




Επομένως, ο A παριστά στροφή κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού κατά $\frac{\pi}{2}$.
Αν ο A ήταν διαγωνίσιμος θα υπήρχε:
$\lambda \in \mathbb{R}$ και $0 \neq x \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ με $Ax = \lambda x$. Στον συνέπεια, αν θέτουμε $V = \langle x \rangle$ θα είχαμε ότι ο V είναι 1-διάστατος υπόχωρος που που πηγαίνει με τη στροφή κατά $\frac{\pi}{2}$

β) $B = \begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ Έχουμε $\chi_B(x) = x^2+1 = (x+i)(x-i)$
Άρα $\chi_B(x)$ έχει δύο διακεκριμένες ρίζες επί του $\mathbb{C}$
$\Rightarrow$ B διαγωνίσιμος. Οι ιδιοτιμές του B είναι $\lambda_1 = i$ και $\lambda_2 = -i$.
Υπολογίζουμε $V_B(i) = \left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} : (B - iI_2)\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\}$, $\begin{bmatrix}-i & 1\\-1 & -i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow -ix + y = 0$ Άρα $V_B(i) = \left\{\begin{bmatrix}x\\ix\end{bmatrix} : x \in \mathbb{C}\right\}$ με βάση $g_1 = \begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$

Ομοίως, βρίσκουμε $V_B(-i) = \left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} : \begin{bmatrix}i & 1\\-1 & i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix}x\\-ix\end{bmatrix} x \in \mathbb{C}\right\}$

με βάση $g_2 = \begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}$ Θέτουμε $P = [g_1^t | g_2^t] = \begin{bmatrix}1 & 1\\i & -i\end{bmatrix}$

Από την θεωρία $P^{-1}BP = \begin{bmatrix}i & 0\\0 & -i\end{bmatrix}$

Τώρα θα δείξουμε ότι $V_B(i) = C$, όπου $C = \{v - iBv \; v \in \mathbb{C}^{2\times 1}\}$
ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ 1 $C \subseteq V_B(i)$. Πράγματι, έστω $v \in \mathbb{C}^{2\times 1}$, τότε $B(v - iBv) =$
$= Bv - iB^2v = Bv - i(-I_2)v = iv + Bv = i(v - iBv)$.
Άρα $C \subseteq V_B(i)$ Χρησιμοποιήσαμε ότι $B^2 = -I_2 = \begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ 2 $V_B(i) \subseteq C$ Έστω $w \in V_B(i)$. Από τον προηγούμενο υπολογισμό του $V_B(i)$, υπάρχει $x \in \mathbb{C}$ ώστε $w = \begin{bmatrix}x\\ix\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ix\end{bmatrix} =$
$= \begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix} - i\begin{bmatrix}0\\-x\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix} - iB\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix}$

γιατί $B\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-x\end{bmatrix}$) Άρα $w = v - iBv$ με $v = \begin{bmatrix}x\\0\end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 1}$. Συνεπώς, $V_B(i) \subseteq C$

Από τις σχ (1), (2) $\Rightarrow C = V_B(i)$

Ομοίως, δείχνουμε ότι $V_B(-i) = \{v + iBv : v \in \mathbb{C}^{2\times 1}\}$

→ ΑΣΚΗΣΗ (εκτός φυλλαδίου)

Έστω $B^2 + I_n = O_{n\times n}$. Θέτουμε $C = \{v - iBv : v \in \mathbb{C}^{n\times 1}\}$

$D = \{v + iBv : v \in \mathbb{C}^{n\times 1}\}$

Δείξτε ότι C, D υπόχωροι του $\mathbb{C}^{n\times 1}$ και ότι $\mathbb{C}^{n\times 1}$ είναι το ευθύ άθροισμα των C, D. Αν $C \neq \{O_{n\times 1}\}$, $D \neq \{O_{n\times 1}\}$ Δείξτε ότι $D = V_B(-i)$

Άσκηση 1

$V = \langle u, w\rangle$. Πρέπει $u, w$ να είναι βάση του $V$ δηλ. γρ. ανεξ. Εύκολα βλέπουμε $u, w$ γρ. ανεξ. (επί του $\mathbb{C}$ γιατί βαθμίδα $\begin{bmatrix}1&1&i\\0&i&-1\end{bmatrix} = 2$ αφού $\begin{vmatrix}1&1\\0&i\end{vmatrix} \neq 0$ Άρα $u, w$ βάση του $V$.

Εφαρμόζουμε Gram-Schmidt

Θέτουμε $h_1 = u = (1,1,i)$ $h_2 = w - \frac{\langle w, h_1\rangle}{\|h_1\|^2} h_1$

Έχουμε $\|h_1\|^2 = \langle h_1, h_1\rangle = \langle (1,1,i),(1,1,i)\rangle = 1\cdot\bar{1} + 1\cdot\bar{1} + i\cdot\bar{i} = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + i(-i) = 3$

$\langle w, h_1\rangle = \langle (0,i,-1),(1,1,i)\rangle = 0\cdot\bar{1} + i\bar{1} - 1\bar{i} = 2i$

Άρα $h_2 = (0,i,-1) - \frac{2i}{3}(1,1,i) = \left(-\frac{2i}{3}, \frac{i}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

(ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ, ΔΕΝ ΧΡΕΙΑΖΕΤΑΙ $\langle h_1, h_2\rangle = \left\langle (1,1,i), \left(-\frac{2i}{3}, \frac{i}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right\rangle =$

$\frac{2i}{3} - \frac{i}{3} - \frac{i}{3} = 0$

$\|h_2\|^2 = \langle h_2, h_2\rangle = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$g_1 = \frac{h_1}{\|h_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,i)$ και $g_2 = \frac{h_2}{\|h_2\|} = \sqrt{2}\left(-\frac{2}{3}i, \frac{1}{3}i, -\frac{1}{3}\right)$

ορθο[illegible]

$g_1, g_2, \dots, g_n$. Θέτουμε $h_1 = g_1$ $\quad h_{k+1} = g_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle g_{k+1}, h_i \rangle}{\|h_i\|^2} h_i$

Άσκηση 2

$A = \begin{bmatrix} 3i/5 & x \\ -4i/5 & y \end{bmatrix}$ Θέλουμε να είναι μοναδιαίος.

A μοναδιαίος ⟺ στήλες αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^{2\times 1}$ ως προς το κανονικό (ή συνήθες) Ερμιτιανό γινόμενο

Θέτουμε $c_1 = \begin{bmatrix} 3i/5 \\ -4i/5 \end{bmatrix}$ $\quad c_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ οι στήλες του A.

Έχουμε $\langle c_1, c_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow \frac{3i}{5} \cdot \bar{x} - \frac{4i}{5} \bar{y} = 0_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{3i}{5} x - \frac{4i}{5} y\right)} = \bar{0}_{\mathbb{C}} = 0_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow$

$-\frac{3i}{5} x + \frac{4i}{5} y = 0_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow -3x + 4y = 0_{\mathbb{C}} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} y$ (για $x, y \in \mathbb{C}$)

Άρα $c_2 = \begin{bmatrix} 4/3y \\ y \end{bmatrix}$ Πρέπει $\langle c_2, c_2 \rangle = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3} y\right)\left(\frac{4}{3}\bar{y}\right) + y\bar{y} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{16}{9} + 1\right) y\bar{y} = 1 \Leftrightarrow |y|^2 = \frac{9}{25} \Leftrightarrow |y| = \frac{3}{5}$. Επιλέγουμε $y = \frac{3}{5}$

Άρα $x = \frac{4}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{5} = \frac{4}{5}$

14/05/2019